

1. Дано натуральное число n . Многочлен $f(x, y)$ степени не выше $n - 1$ таков, что при любых натуральных $x, y \leq n$, $x + y \leq n + 1$, выполняется равенство $f(x, y) = x/y$. Найдите все возможные значения $f(0, 0)$.

2. Рассмотрим на координатной плоскости множество M всех точек вида (i, j) , $0 \leq i, j, i + j \leq n$, и $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ вещественных чисел w_{ij} , $(i, j) \in M$. Нас будет интересовать многочлен $f \in \mathbb{R}[x, y]$ степени не выше n , удовлетворяющий равенствам $f(i, j) = w_{ij}$ при всех $(i, j) \in M$.

(а) Докажите, что существует не более одного такого многочлена.

(б) Предположим, что $w_{ij} = 0$ при всех $i + j < n$. Докажите, что искомый многочлен имеет вид $\sum_{i, j \geq 0, i + j = n} w_{ij} \binom{x}{i} \binom{y}{j}$.

(с) Докажите, что искомый многочлен всегда существует.

3. Два множества $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ и набор из $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ вещественных чисел w_{ij} , $(i, j) \in M$. Нас интересует многочлен $f \in \mathbb{R}[x, y]$ степени не выше n , удовлетворяющий равенствам $f(x_i, y_j) = w_{ij}$ при всех $(i, j) \in M$. Очевидно, что доказательство его единственности аналогично доказательству задачи 2а.

(а) Предположим, что $w_{ij} = 0$ при всех $i + j < n$. Докажите, приведя явную формулу, что искомый многочлен существует.

(б) Докажите, что искомый многочлен всегда существует.

4. Про многочлен $P \in \mathbb{R}[x, y]$ известно, что для любого неотрицательного целого числа n каждый из многочленов $P(n, y)$ и $P(x, n)$ имеет степень не выше n . Докажите, что степень многочлена $P(x, x)$ чётна.

5. Докажите, что для любого чётного числа $n \geq 2$ найдётся многочлен степени n , удовлетворяющий условию предыду-

щей задачи.

6. Дано число $d \in \mathbb{N}$. Найдите все функции $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что для любых вещественных чисел A, B, C, D функция $f(At + B, Ct + D)$ на всём \mathbb{R} совпадает с некоторым многочленом степени не выше d .

7. Существует ли функция $g: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$ такая, что для любого рационального числа t функции $g(t, y)$ и $g(x, t)$ совпадают с некоторыми многочленами одной переменной на всём \mathbb{Q} , но сама g не является многочленом?

8. Существует ли функция $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для любого вещественного числа t функции $f(t, y)$ и $f(x, t)$ совпадают с некоторыми многочленами одной переменной на всём \mathbb{R} , но сама f не является многочленом двух переменных?

Дополнительные задачи

9. Существует ли многочлен $P \in \mathbb{R}[x, y]$ такой, что верно равенство $P(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}_{>0}$?

10. Рассмотрим все многочлены $P \in \mathbb{Z}[x, y, z]$, для которых условия $P(a, b, c) = 0$ и $a = b = c$ равносильны. При каком наибольшем целом r для любого такого многочлена и целых чисел m, n число $P(n, n + m, n + 2m)$ кратно m^r ?

11. Существует ли многочлен $P \in \mathbb{R}[x, y]$ такой, что для любого натурального числа n уравнение $P(x, y) = n$ имеет решение в натуральных числах тогда и только тогда, когда n не является полным квадратом?

12. Существует ли многочлен $P \in \mathbb{R}[x, y]$ такой, что все его значения неотрицательны, но его невозможно представить в виде суммы квадратов двух многочленов из $\mathbb{R}[x, y]$?